

由相叠的低分辨扇形束投影数据 重建高分辨 CT 图像

张 朋¹ 郭明焕²

1(北京信息工程学院 北京 100101)

2(西北大学 西安 710069)

摘要 在研究扇形束插值代数重建法基础上,提出了由相叠的低分辨扇形束投影数据重建高分辨 CT 图像的两个新算法,即扇形束的虚拟探测器法和扇形束的直接重建法,并给出和分析了数值模拟结果。

关键词 计算机层析成像,相叠采样,插值代数重建法,低分辨扇形束投影数据,高分辨 CT 图像

中图分类号 TP391.41

传统上人们认为探测器的分辨率决定了 CT 投影数据的分辨率,而 CT 投影数据的分辨率又决定了重建 CT 图像的分辨率。可否由低分辨率的探测器所采集的投影数据,重建出高于探测器分辨率的图像呢?文[1]设计了相叠采样(Overlapped sampling)方式,利用多线法和基于块迭代的快速代数重建法重建出了明显高于投影数据分辨率的 CT 图像,其本质在于系列相叠的低分辨投影数据事实上蕴含了 CT 图像的高分辨信息。

本文在研究插值代数重建法(IART)^[2]的基础上,提出了由相叠的低分辨扇形束投影数据重建高分辨 CT 图像的两个新算法,即扇形束的虚拟探测器法和扇形束的直接重建法,模拟数据重建结果表明两种算法均可重建出明显高于投影数据分辨率的 CT 图像。

1 扇形束插值代数重建法(FIART)

扇形束 CT 的扫描系统的几何布置如图 1 所示,其中 S_j 为 X 射线源所处的位置,均匀分布在以 O 为心,以 R_s 为半径的圆周上($j=1,2,\dots,J$) 被探测物体放置在以 O 为心,以为 R_r 半径的圆域内 线阵探测器的各个探测器排列在以 S_j 为心,以 R_d 为半径的圆弧 Γ 上,每个探测器对应的圆心角为 $\Delta\gamma$,弧长为 $d=R_d\Delta\gamma$ 线阵探测器的中心为 D , S_jD 为扇形束 X 射线的中心射线 Q_i 为第 i 个像素中心, $Q_{i,j}$ 为 Q_i 沿方向 S_jQ_i 在 Γ 上的投影 α_j 为 OS_j 与 OY 的夹角, $\gamma_{i,j}$ 为 $S_jQ_{i,j}$ 与 S_jD 的夹角($i=1,2,\dots,I;j=1,2,\dots,J$)。

ART^[3,4] 的基本思想是 将被检测区域划为若干个像素,将探测器检测到的投影数据与各像素的 CT 值之间的关系归结为一个线性代数方程组,通过迭代法求解该方程组得到像素的 CT 值。如图 1,被检测区域划分为 $N\times N$ 个像素,设 X_i 为第 i 个像素的 CT 值 设 $p_{k,j}$ 是源处于 S_j 时第 k 个探测器对应的投影值 设 $r_{i,j}^k$ 为源处于 S_j 时第 i 个像素对第 k 个探测器对应的投影值 $p_{k,j}$ 的贡献因子,根据 Beer 定律得线性代数方程组

国家自然科学基金(69931010)和教育部高等学校骨干教师资助计划资助

第一作者 张朋,男,1957 年出生,1996 年于中国科学院数学研究所获理学博士学位,中国电视学会理事,中国电视学会 CT 理论与应用专业委员会副主任委员

收稿日期 2002-08-10

$$p_{k,j} = \sum_{i=1}^{N \times N} r_{i,j}^k X_i, \quad k = 1, 2, \dots, K; \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (1)$$

方程组(1)可通过如下迭代法求解：

$$X_i^{q+1} = X_i^q + \sum_{k=1}^K \lambda_k \frac{r_{i,j}^k}{\sum_l (r_{l,j}^k)^2} \Delta p_k^q$$

其中, X_i^q, X_i^{q+1} 分别表示经过 q 轮和 $q+1$ 轮迭代后第 i 个像素的 CT 值, $\Delta p_{k,j}^q = p_{k,j} - \sum_{i=1}^{N \times N} r_{i,j}^k X_i^q$, λ_k 是松弛因子。

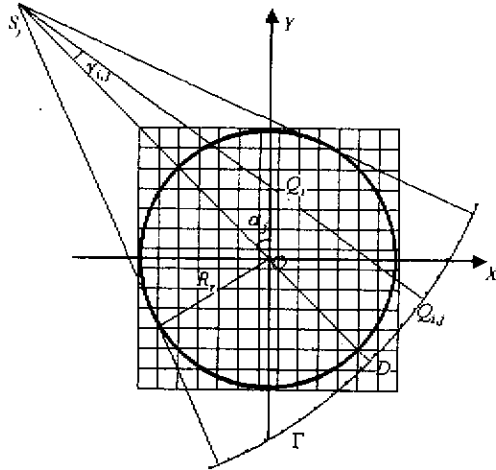


图 1 扇形束扫描系统的几何关系

Fig. 1 Fan beam geometry

有不同的方法近似 $r_{i,j}^k$, 如将 $r_{i,j}^k$ 取作 S_j 到第 k 个探测器的中心的射线与第 i 个像素的交线长, 或将 $r_{i,j}^k$ 取作 S_j 到第 k 个探测器对应的射束与第 i 个像素相交的面积。本文中采用 FI-ART^[2], 其特点在于计算简单, 并考虑了距探测器不同距离的像素对探测器的不同贡献。下面给出该方法中 $r_{i,j}^k$ 的定义。

当源处于 S_j 时, 将第 i 个像素绕中心 Q_i 旋转, 使其一边与 $S_j Q_i$ 平行。设旋转后的像素在 Γ 上的投影的弧长为 $2h_{i,j}$, $h_{i,j} = 0.5 a R_d / S_j Q_i$, 其中 a 为象素宽度。

设 u_k 是第 k 个探测器的中心坐标。为计算方便, 取探测器的宽度为单位 1。文[2]在 $a = d$ 的假设下, 给出了 FIART 的插值函数 $g_{i,j}(u_k)$ 的定义。本文对一般情况, 定义 FIART 的插值函数 $g_{i,j}(u_k)$ 如下：

1) 当 $h_{i,j} \geq 0.5$ 时,

$$g_{i,j}(u_k) = \begin{cases} 1 & , |u_k - Q_{i,j}| \leq h_{i,j} - 0.5 \\ 0.5 + h_{i,j} - |u_k - Q_{i,j}| & , h_{i,j} - 0.5 < |u_k - Q_{i,j}| \leq h_{i,j} + 0.5 \\ 0 & , |u_k - Q_{i,j}| > h_{i,j} + 0.5 \end{cases}$$

2) 当 $h_{i,j} < 0.5$ 时,

$$g_i(u_k) = \begin{cases} 2h_{i,j} & , |u_k - Q_{i,j}| \leq 0.5 - h_{i,j} \\ 0.5 + h_{i,j} - |u_k - Q_{i,j}| & , 0.5 - h_{i,j} < |u_k - Q_{i,j}| \leq 0.5 + h_{i,j} \\ 0 & , |u_k - Q_{i,j}| > 0.5 + h_{i,j} \end{cases}$$

显然, $\sum_k g_{i,j}(u_k) = 2h_{i,j}$ 。在 FIART 中, 定义 $r_{i,j}^k = g_{i,j}(u_k) a \Delta\gamma$ 。

2 由低分辨投影数据重建高分辨 CT 图像

2.1 扇形相叠采样

假设检测区域的投影总落在线阵探测器的扫描范围内。设每个探测器的宽度为 $d = R_0 \Delta\gamma$ 。假设线阵探测器可沿所在圆弧移动, 且移动的步长 $\delta < d$, 即线阵探测器可以绕着射线源旋转, 转角间隔小于 $\Delta\gamma$ 。对给定的射线源位置, 线阵探测器依次作 L 次采样, 每次采样后位移 δ , 如此采样得到的采样数据称为 L 次相叠的低分辨扇形束投影数据。

2.2 扇形束的虚拟探测器法

算法的基本思想是: 假想一个探测器由 L 个同样的虚拟探测器组成, 这样该探测器的读数等于这 L 个虚拟探测器读数的和。若能从线阵探测器采集的相叠的低分辨扇形束投影数据, 求得各个虚拟探测器对应的高分辨投影数据, 即可利用 FIART 重建出高分辨 CT 图像。

为叙述简便, 本文以 $L=3, \delta=d/L, a=\delta$ 为例介绍扇形束的虚拟探测器法。设线阵探测器每次采样后沿所在圆弧的负方向移动 δ (也就是线阵探测器绕 S_j 按顺时针方向旋转 $\Delta\gamma/L$)。记 $M=3K$, 此时共有 $M+2$ 个虚拟探测器。 l 是线阵探测器的采样序号, $l=1, 2, 3$ 。 k 是探测器的序号, $k=1, 2, \dots, K$ 。源处于 S_j 时, 沿线阵探测器所在圆弧的方向, 编号为 k 的探测器的第 l 次采样对应的投影值设为 $p_{3k-l+1,j}$, 沿线阵探测器所在圆弧方向, 虚拟探测器的序号设为 m , 对应的投影值设为 $\hat{p}_{m,j}, m=1, 2, \dots, M+2$ 。一般而言, 应该有

$$\alpha \hat{p}_{m,j} + \beta \hat{p}_{m+1,j} + \alpha \hat{p}_{m+2,j} = p_{m,j}, \quad m=1, 2, \dots, M \quad (2)$$

式中 α 和 β 应由系统的点扩张函数确定。为简单起见, 取 $\alpha=\beta=1$, 则(2)化为

$$\hat{p}_{m,j} + \hat{p}_{m+1,j} + \hat{p}_{m+2,j} = p_{m,j}, \quad m=1, 2, \dots, M \quad (3)$$

易见 $\hat{p}_{m,j}=0, m=1, 2$ 或 $m=M+1, M+2$; $\hat{p}_{m,j} \geq 0, m=1, 2, \dots, M$ 。

方程组(3)是超定的, 可以按一定方法求得广义解(即虚拟探测器对应的投影数据), 之后可用 FIART 重建 CT 图像。

2.3 扇形束的直接重建法

为简单起见, 仍假设 $L=3, \delta=d/L$ (事实上, 对直接重建法不必假定 $\delta=d/L$), $a=d/L$ 。对源的每个位置 S_j , 线阵探测器进行 3 次相叠采样, 得到 3 次相叠的低分辨扇形束投影数据。

源处于 S_j 时线阵探测器的第 l 次采样中, 第 k 个探测器对应的投影数据设为 $p_{k,j}^l$, 第 k 个探测器的中心坐标为 u_k^l , 第 i 个像素的中心坐标在线阵探测器上的投影的坐标为 $Q_{i,j}^l, k=1, 2, \dots, K; j=1, 2, \dots, J; l=1, 2, 3$ 。于是, 可按第 1 节所述的方法, 对每个 $p_{k,j}^l$ 建立线性代数方程。迭代求解方法如下: (1) 对 α_j 排序; (2) 对给定 j 和 l , 对 $p_{k,j}^l$ 对应的方程依次迭代求解, $k=1, 2, \dots, K$; (3) 对所有 j 和 l , 对 $p_{k,j}^l$ 对应的方程迭代后, 进行判断, 必要时继续作下一轮迭代, 直至得到满意的逼近解。

3 数值结果与分析

3.1 仿真图像与模拟投影数据

仿真模型的断面图像如图 2 所示。模型的断面为一带有 48 个圆孔的圆盘, 其中圆盘的半

径为 12.75 mm, 外层圆孔 18 个, 半径为 1.54 mm, 各圆心均匀排列在半径为 9.71 mm 的圆周上; 中层圆孔 16 个, 半径为 0.91 mm, 各圆心均匀排列在半径为 5.18 mm 的圆周上; 内层圆孔 14 个, 半径为 0.38 mm, 各圆心均匀排列在半径为 1.94 mm 的圆周上。仿真模型的 CT 值分布 $f(Y)$ 为: 当 Y 在 48 个圆孔内或大圆盘之外时, $f(Y) = 0$; 当 Y 在除去 48 个圆孔的圆盘上时, $f(Y) = 255$ 。

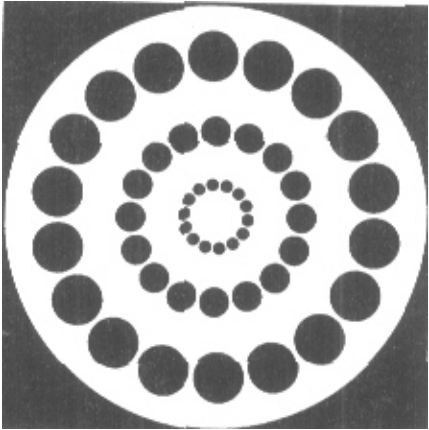


图 2 模型图像
Fig. 2 Model image

计算可知, 两相邻的外层圆孔之间的距离均为 0.3mm, 两个相邻的中层圆孔之间的距离均为 0.2mm, 两相邻的内层圆孔之间的距离均为 0.1mm。

取 $R_s = 51.8\text{mm}$, $R_d = 75.11\text{mm}$, $R_r = 12.95\text{mm}$ 。

高分辨投影数据由 331 个探测器(每个宽度为 0.1mm)组成的线阵探测器扇形采样得到; 相叠的低分辨扇形束投影数据由 111 个探测器(每个宽度为 0.3mm)组成的线阵探测器 3 次相叠采样得到; 不相叠的低分辨投影数据由 111 个探测器(每个宽度为 0.3mm)组成的线阵探测器扇形不相叠采样得到。射线源位置 $S_j (j = 1, 2, \dots, 814)$ 等弧长分布在圆周上。

3.2 重建 CT 图像及评测

我们采用如下两种图像距离评价重建 CT 图像与模型图像的逼近程度^[4]：

1) 归一化均方根距离

$$\text{Dist1}(\bar{X}, X) = \sqrt{\sum_i (\bar{X}_i - X_i)^2 / \sum_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2} \tag{4}$$

2) 归一化平均绝对距离

$$\text{Dist2}(\bar{X}, X) = \sum_i |\bar{X}_i - X_i| / \sum_i |\bar{X}_i| \tag{5}$$

式中 $\bar{X}$ 是原始图像或相应的参考图像, 而 $\bar{}$ 表示对图像取算术平均值。Dist1($\bar{X}, X$) 表示图像 X 与 $\bar{X}$ 的归一化均方根距离, 而 Dist2($\bar{X}, X$) 表示 X 与 $\bar{X}$ 的归一化平均绝对距离。在图像的少数像素上出现的大偏差会使 Dist1($\bar{X}, X$) 的值较大, 而在许多像素上出现的小偏差会使 Dist2($\bar{X}, X$) 的值较大。在本文模拟试验中, $\lambda_k = 0.1$, 迭代次数 $q = 2$ 。模型图像和重建 CT 图像的大小均为 259×259 像素。

用不同的扇形束模拟投影数据及算法重建的 CT 图像见图 3, 图像距离(4)和(5)对图 3(a)、(b)、(c)、(d) 的评测结果见表 1。

表 1 图 3 中重建 CT 图像(a)、(b)、(c)、(d)分别与模型图像的距离
Table 1 Image distances from reconstructed CT images (a), (b), (c), (d)
in Fig. 3 to the model image in Fig. 2

$q=2$	(a)	(b)	(c)	(d)
Dist1	0.260660	0.260670	0.260681	0.274748
Dist2	0.074002	0.073941	0.083430	0.108912

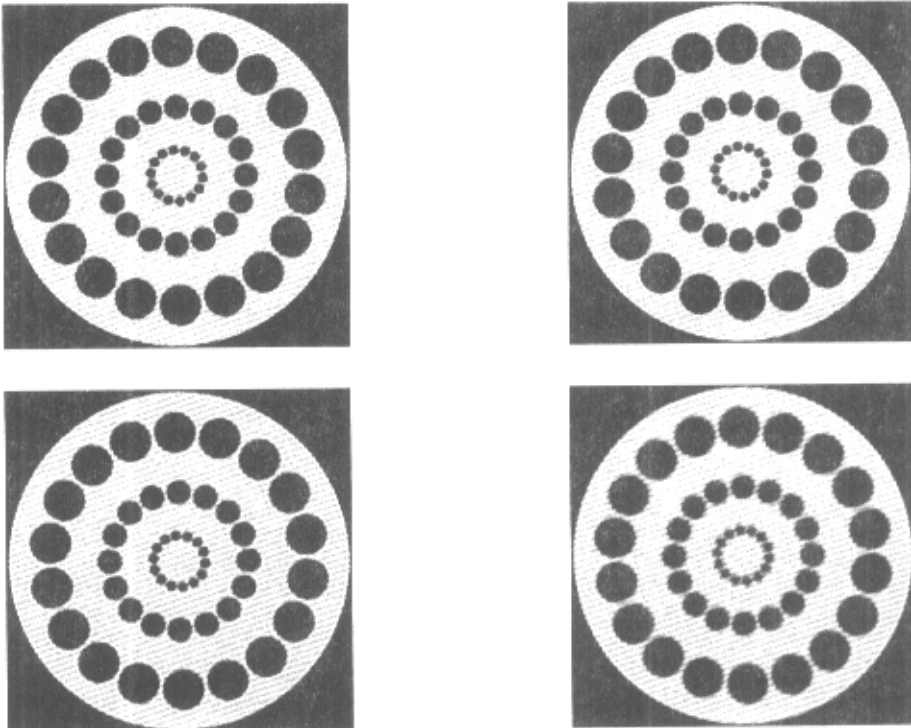


图 3 重建的 CT 图像 (a)用扇形束插值代数重建法由高分辨投影数据重建的 CT 图像，
(b)用扇形束的虚拟探测器法由三次相叠的低分辨投影数据重建的 CT 图像，
(c)用扇形束的直接重建法由三次相叠的低分辨投影数据重建的 CT 图像，
(d)用扇形束的插值代数重建法由不相叠的低分辨投影数据重建的 CT 图像

Fig. 3 Reconstructed CT image (a) reconstructed by FIART from the high – resolution projection data, (b) reconstructed by the fan beam virtual detector algorithm from the three – time overlapped low – resolution projection data, (c) reconstructed by the fan beam direct reconstruction algorithm from the three – time overlapped low – resolution projection data and (d) reconstructed by FIART from the low – resolution projection data

3.3 结论

由模拟扇形束投影数据重建的 CT 图像及评测结果(参见图 3 和表 1)分析得出如下结论：
由相叠的低分辨扇形束投影数据重建的 CT 图像的分辨率明显高于由不相叠低分辨扇形束投影数据直接重建的 CT 图像的分辨率；
用扇形束的虚拟探测器法由三次相叠的低分辨投影数据重建的 CT 图像的分辨率与由高分辨数据直接重建的 CT 图像的分辨率基本接近；
用扇形束的直接重建法重建的 CT 图像的分辨率略低于扇形束的虚拟探测器法重建的 CT

图像的分辨率,但扇形束的直接重建法可适用于各种形式的扇形相叠采样数据。

本文未考虑源的焦点尺寸、点扩张函数等因素对重建图像的影响,对此尚需作进一步研究。

参 考 文 献

- 1 王小璞,张朋,李兴东,等. CT 理论与应用研究,2000,9(增刊) 10—12
WANG Xiaopu, ZHANG Peng, LI Xingdong, *et al.* Computerized Tomography Theory and Applications, 2000, 9(Supplement) : 10—12
- 2 Marzur E J, Gordon R. Med Biol Eng Comput, 1995, (33) 82—86
- 3 Herman G T. Imaging reconstruction from projection : the fundamentals of Computerized Tomography. New York : Academic Press, 1980
- 4 Herman G T 著,严洪范等译. 由投影重建图像——CT 的理论基础. 北京 科学出版社, 1988. 187—211, 64—66
Herman G T(author), YAN Hongfan *et al.* (translators). Imaging reconstruction from projection : the fundamentals of Computerized Tomography. Beijing : Science Press, 1988. 187—211, 64—66

Reconstructing high resolution image from overlapped low resolution fan beam projections data

ZHANG Peng¹ GUO Minghuan²

¹(Beijing Information Technology Institute, Beijing 100101)

²(Northwest University, Xian 710069)

Abstract

Based on the study of the algebraic reconstruction techniques (ART) and the fan beam interpolative algebraic reconstruction techniques (FIART), two novel algorithms to reconstruct high resolution CT image from overlapped low resolution fan beam projection data are presented. One of the algorithms is called fan beam virtual detector algorithm, and the other is called fan beam direct reconstruction algorithm. Some simulation results are shown and analyzed.

Key words Computed tomography, Overlapped sampling, Interpolative algebraic reconstruction techniques, Low resolution fan beam projection data, High resolution CT image

CLC TP391.41